הרצאה 4

משפט קיום ויחידות

דוגמא:

צריך להוכיח שהפתרון של משוואה $y' + x^3(e^{y^2} - e) = 0$ שעבר דרך הנקודה $y(0) = 0.5$ חסום

משוואה נתונה – היא משוואה פרידה $\frac{dy}{e^{y^2} - e} = -x^3 dx$

אבל אין אינטגרל $\int \frac{dy}{e^{y^2} - e}$ בצורה כפונקציות אלמנטריות

(אינטגרליים שאי-אפשר לקבל $\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int xtgxdx, \int e^{-x^2} dx, \int \sqrt{\sin x} dx, \ldots$)

שאלות:

1. האם קיים פתרון לבעיית ההתחלה?
2. האם יתכן כי לבעיית ההתחלה יש יותר מפתרון אחד?
3. אם קיים פתרון לבעיית ההתחלה, מהו תחום הגדרה שלו?

דוגמא 1:

נתונה משוואה $y' + \frac{2}{x} y = x^5$ תנאי התחלה: $y(0) = 7$

פתרון

משוואה נתונה היא משוואה ליניארית.

גורם אינטגרציה: $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = x^2$

$$yx^2 = \int x^7 dx + C = \frac{x^8}{8} + C \Leftarrow \left(yx^2\right)' = x^5 \cdot x^2 = x^7$$

פתרון כללי: $y(x) = \frac{x^6}{8} + \frac{C}{x^2}$

פתרון פרטי: לא קיים כי $x = 0$

דוגמא 2:

נתונה משוואה $y' - \frac{2}{x}y = x^5$ תנאי התחלה: $y(0) = 0$

פתרון

משוואה נתונה היא משוואה ליניארית.

גורם אינטגרציה: $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$

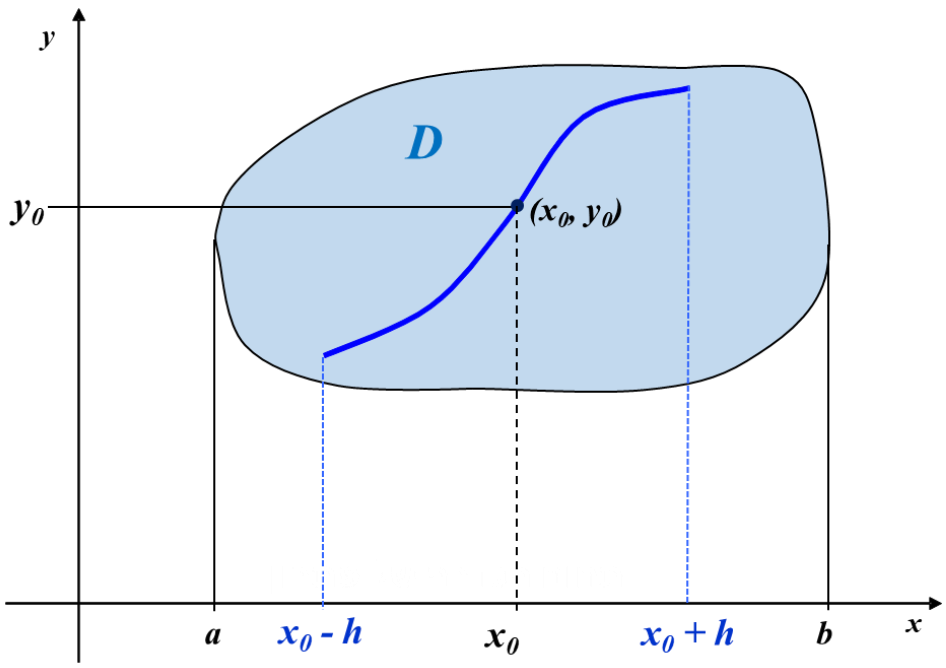
$$yx^{-2} = \int x^3 dx + C = \frac{x^4}{4} + C \Leftarrow \left(yx^2\right)' = x^5 \cdot x^{-2} = x^3$$

פתרון כללי: $y(x) = \frac{x^6}{4} + Cx^2$

פתרון פרטי: $0 = 0 + C \cdot 0$ קבלנו ש - C מספר כל שהוא. אז יש אינסוף פתרונות.

משפט קיום ויחידות מד"ר מסדר ראשון

אם נתונה משוואה $y' = f(x,y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ ופונקציות $f(x,y),\ f'_y(x,y)$ רציפות בתחום הדו-ממדי D במישור (x,y) סביב הנקודה (x_0, y_0) אז קיימת סביבה $[x_0 - h, x_0 + h]$ של נקודה x_0 כך שלפחות עבור $x_0 - h < x < x_0 + h$ למשוואה נתונה קיים פתרון אחד ויחיד



הערות:

1. המשפט אינו מבטיח שלמשוואה יש פתרון בכל הקטע $x\in[a,b]$, קיים פתרון רק בקטע פנימי $|x-x_0|\le h$, $([x_0-h,x_0+h]\subset[a,b])$.
2. המשפט הוא משפט מספיק, אם תנאים לא מתקיימים זה לא אומר שאין פתרון

בדוגמא 1 $y'=x^5-\frac{2}{x}y=f(x,y)$, $f'_y(x,y)=-\frac{2}{x}$ פונקציות לא רציפות בנקודה $(0,7)$ וקבלנו שאין פתרון

בדוגמא 2 $y'=x^5+\frac{2}{x}y=f(x,y)$, $f'_y(x,y)=\frac{2}{x}$ פונקציות לא רציפות בנקודה $(0,0)$ וקבלנו שיש אינסוף פתרונות.

מסקנות:

1. אם פונקציה $f(x,y)$ רציפה, אז קיים פתרון
2. אם $f'_y(x,y)$ רציפה, אז קיים פתרון יחיד
3. משפט קיום ויחידות קשור לקיום פתרון לוקלי: תחום הדו-ממדי D במישור (x,y) סביב הנקודה (x_0,y_0) הוא תחום הגדרה של משוואה. תחום הגדרה של הפתרון $y(x)$ של בעיית ההתחלה $y(x_0)=y_0$ הוא קטע המקסימלי של ערכי x המכיל את נקודת ההתחלה x_0 שבו $y(x)$ גזיר, מקיים את משוואה דיפרנציאלית ואת תנאי ההתחלה.

דוגמא:

פתור משוואה: $y'=-\frac{x}{y}$ עם תנאי ההתחלה $y(1)=2$

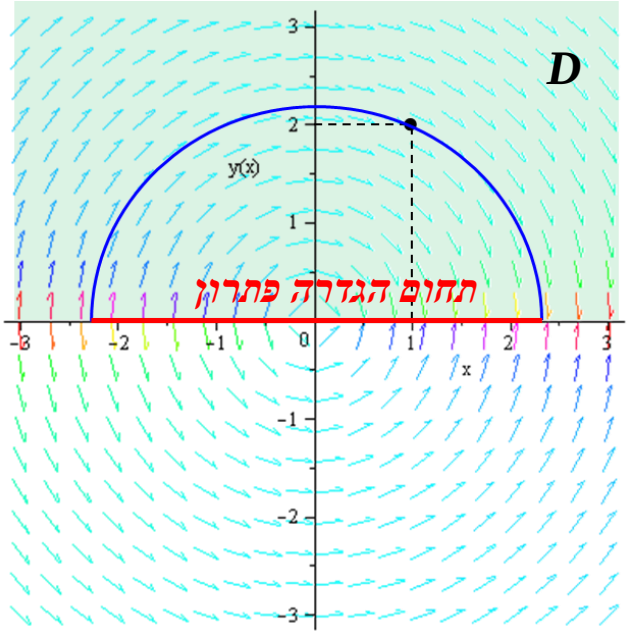
פתרון

$f(x,y)=-\frac{x}{y}$ ו $f'_y(x,y)=\frac{x}{y^2}$ פונקציות רציפות לכל $-\infty<x<\infty, y\ne 0$, קיים פתרון יחיד

$y(1)=2$ אז תחום הגדרה של משוואה: $-\infty<x<\infty, y>0$,

פתרון כללי: $y=\sqrt{C-x^2}$ ופתרון פרטי $y=\sqrt{5-x^2}$.

תחום הגדרה של פתרון: $-\sqrt{5}<x\sqrt{5}$



דוגמא:

פתור משוואה: $y' = \frac{x}{y^2}$ עם תנאי ההתחלה $y(0) = 0$

פתרון

$f(x,y) = \frac{x}{y^2}$ ו $f'_y(x,y) = -\frac{2x}{y^3}$ פונקציות לא רציפות ב - $(0,0)$. תנאים של משפט לא מתקיימים.

$y^2dy = xdx$ אז פתרון כללי $\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$, פתרון פרטי: $0 = 0 + C$ מכן $C = 0$ ו- $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2}$ פתרון אחד ויחיד

דוגמא:

פתור משוואה: $y' = xy^{\frac{2}{3}}$ עם תנאי ההתחלה $y(0) = 0$

פתרון

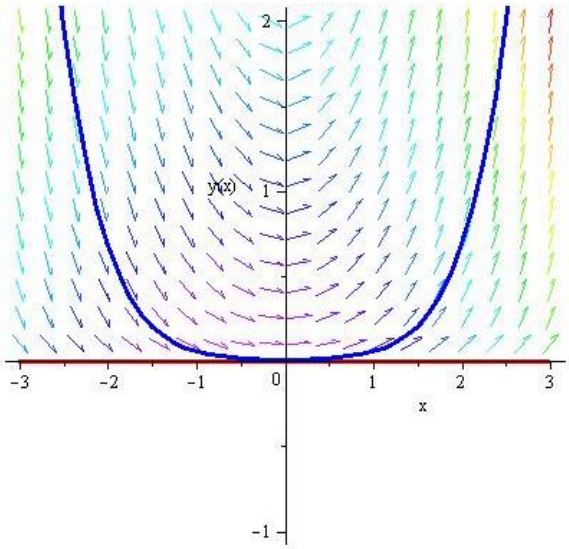
$f(x,y) = xy^{\frac{2}{3}}$ פונקציה רציפה בסביבה של נקודה $(0,0)$ אז ידוע שפתרון קיים,

$f'_y(x,y) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{y}}$ פונקציות לא רציפות ב - $(0,0)$, לא ידוע קמה פתרונות קיימים.

$y^{-\frac{2}{3}}dy = xdx$ אז פתרון כללי $3\sqrt[3]{y} = \frac{x^2}{2} + C$, $y = 0$ - פתרון סינגולרי. פתרון פרטי:

$0 = 0 + C$ מכן $C = 0$ ו- $y = \left(\frac{x^2}{6}\right)^3$, פתרון סינגולרי הוא גם מתקיים תנאי ההתחלה אז הוא גם

פתרון פרטי. פונקציות: $y(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \left(\frac{x^2}{6}\right)^3, & x\ge 0\end{cases}$, $y(x)=\begin{cases}\left(\frac{x^2}{6}\right)^3, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$ גם פתרונות פרטים של משוואה.



משפט קיום ויחידות למד"ר ליניארית מסדר ראשון

אם פונקציות $p(x)$ ו $g(x)$ רציפות ב קטע הפתוח (α,β) שמכיל נקודה x_0, $\left(x_0\in(\alpha,\beta)\right)$, אזי למשוואה $y'+p(x)y=g(x)$ יש פתרון אחד ויחיד בתחום (α,β) המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$

דוגמא:

פתור משוואה: $y'+ye^x tgx=e^x tgx$ עם תנאי ההתחלה $y(0)=1$

פתרון

קל לראות ש- $y=1$ הוא פתרון של המשוואה. הוא עובר דרך נקודה $(0,1)$. אזי הוא פתרון יחיד של המשוואה בקטע $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ שמכיל את הנקודה $x_0=0$, כי פונקציות $p(x)=g(x)=e^x tgx$ רציפות בקטע $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ומשוואה מתקיימת תנאי משפט קיום ויחידות.

דוגמא:

פתור משוואה: $xy'-2y=0$ עם תנאי ההתחלה $y(0)=0$

פתרון

קל לראות שלמשוואה זאת יש שני פתרונות, שעוברים דרך הנקודה $(0,0)$: $y=0$ ו $y=x^2$.

אבל אין סתירה עם משפט קיום ויחידות כי משתמשים משפט למשוואה מנורמלת

$y'+p(x)y=g(x)$, משוואה $y'-\frac{2}{x}y=0$ לא מקיימת תנאי משפט קיום ויחידות בשום קטע

סביב הנקודה $(0,0)$, כי פונקציה $p(x)=\frac{2}{x}$ לא רציפה בנקודה $x=0$.

שימוש לקיום פתרון

דוגמא:

צריך להוכיח שהפתרון של משוואה $y'+x^3(e^{y^2}-e)=0$ שעבר דרך הנקודה $y(0)=0.5$ חסום

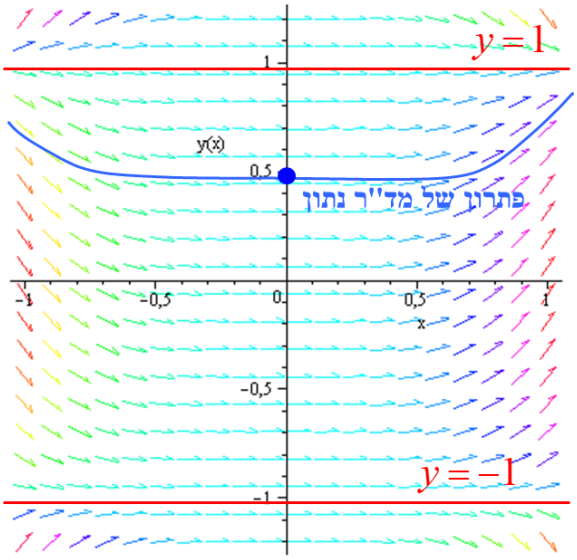
$y'=-x^3(e^{y^2}-e)=f(x,y)$ אז $f(x,y)=-x^3(e^{y^2}-e)$ ו- $f'_y(x,y)=-2yx^3e^{y^2}$ פונקציות

רציפות בכל מישור (x,y), זה אומר שלמשוואה בכל נקודה של מישור (x,y) קיים פתרון אחד ויחיד.

$y=1$ ו- $y=-1$ פתרונות אז אף עקום לא חותך ישרים אלה. $-1<y(0)=0.5<1$. פתרון שעובר

דרך נקודת ההתחלה נמצא בין ישרם $y=1$ ו- $y=-1$ ולא יכול להיפגש איתם (אם יש נקודת פגישה

יש שני פתרונות בנקודה זו, שסותר משפט קיום ויחידות)



דוגמא:

הוכח שלמשוואה: $y'=y(y-4)(x^2-y)$ לא קיים פתרון שעובר דרך נקודות $(1,5)$ ו- $(0,2)$

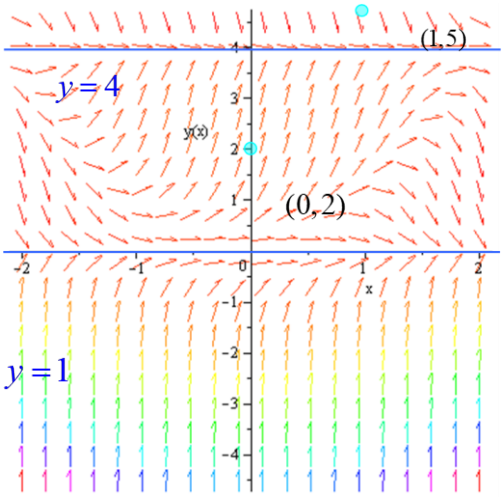
פתרון

$f(x,y)=y(y-4)(x^2-y)$ ו- $f'_y(x,y)$ פונקציות רציפות בכל מישור (x,y), זה אומר

שלמשוואה בכל נקודה של מישור (x,y) קיים פתרון אחד ויחיד.

$y=0$ ו- $y=4$ פתרונות אז אף עקום לא חותך ישרים אלה.

פתרון שעובר דרך נקודות $(1,5)$ ו-$(0,2)$ חייב לחתוך ישר $y=4$ ובנקודת חיתוך יש שני פתרונות שסותר משפט קיום ויחידות.



דוגמא:

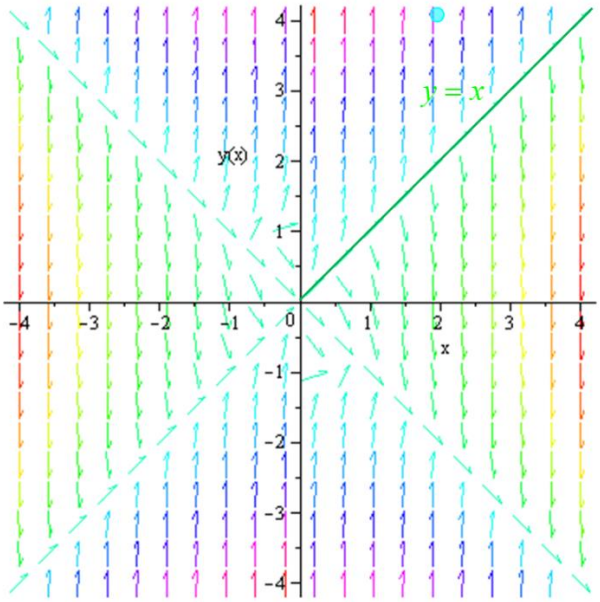
מצא $\lim_{x\to\infty} y(x)$ אם $y(x)$ פתרון של משוואה: $y' = \frac{y}{x} + 5(y^2 - x^2)$ שמתקיים $y(2) = 4$

פתרון

$f(x,y) = \frac{y}{x} + 5(y^2 - x^2)$ ו- $f'_y(x,y)$ פונקציות רציפות בכל תחום

$D = \{(x,y) : x > 0, -\infty < y < \infty\}$, זה אומר שלמשוואה בכל נקודה של תחום D קיים פתרון אחד ויחיד.

$y = \pm x$ פתרונות, אם $y = x$ אז $y(2) = 2$ ופתרון פרטי נמצא מעל הישר $y = x$, $x < y(x)$ ולפי משפט סנדוויץ' מקבלים: $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$



דוגמא:

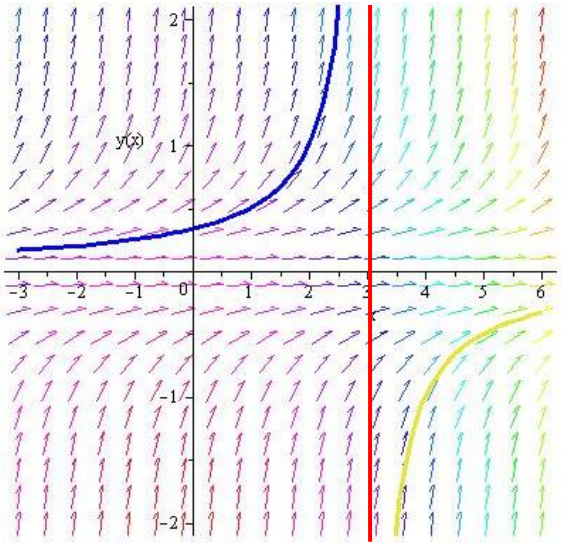
מצא תחום הגדרה של פתרון המשוואה: $y' = y^2$ שמתקיים $y(2)=1$

פתרון

$f(x,y)=y^2$ ו- $f'_y(x,y)=2y$ פונקציות רציפות בכל מישור (x,y), אז קיים פתרון אחד ויחיד

$y^{-2}dy = dx$ ופתרון כללי: $-\frac{1}{y} = x + C$, ופתרון פרטי: $-\frac{1}{1} = 2 + C$, $C=-3$, $y = \frac{1}{3-x}$

בנקודה $x=3$ קיימת אסימפטוטה אנכית, אז פונקציה $y = \frac{1}{3-x}$ לא רציפה לכל x.

פתרון של מד"ר חייב להיות רציף סביב נקודת התחלה, אז תחום הגדרה של פתרון הוא:

$-\infty < x < 3$ כי נקודה $x = 2 \in (-\infty, 3)$